определение поверхности.

Пусть  ‑ область,  ‑ точечное евклидово пространство, в котором задан правый ортонормированный репер. Тогда координатное выражение отображения  (как, впрочем, и координатное выражение соответствующей вектор-функции ), имеет вид:

.

В дальнейшем будем использовать обозначения

,

и иметь в виду, что для  пара  как раз такая, что .

Определение 16.1. Будем говорить, что отображение  *регулярно* в точке , если ранг матрицы  равен 2.

Условие  равносильно условию 

Говорят, что  регулярно, если оно регулярно во всех точках.

Определение 16.2. Пусть отображение инъективно и непрерывно. Говорят, что  гомеоморфно отображает  на образ , если любая точка  обладает свойством

.

При этом  называют гомеоморфным образом  при отображении .

Определение 16.3. Фигура  называется *поверхностью,* если для  существует окрестность  в  и пара , где  область в , а  отображение такое, что:

a)  ‑ гладко и регулярно

b)  ‑ гомеоморфный образ  при отображении .

Пару  из определения 16.4 будем называть параметризацией (окрестности ).

§18. внутренние координаты на поверхности.

Пусть **** параметризация окрестности  на поверхности **.** Если точка , то пару  будем называть *внутренними координатами* точки , лежащей на поверхности. Как координаты точки в евклидовом пространстве зависят от выбора репера, так внутренние координаты точки на поверхности зависят от выбора параметризации.

*u*

*U*

Внутренние координаты позволяют говорить о внутренних уравнения фигур на поверхности . В частности, уравнение , где  ‑ область в , будем называть *внутренним неявным заданием* фигуры на поверхности .

Для интервала  уравнения

,

задающие кривую в области , будем называть *внутренними параметрическими уравнениями* кривой



на поверхности .

Пример 18.1.  и  ‑ внутренние уравнения семейств кривых на поверхности, которые будем называть координатными кривыми (линиями).

Рассмотрим более подробно кривую  с внутренним неявным уравнением , проходящую через точку  с внутренними координатами : . В качестве внутренних параметрических уравнений этой кривой можно взять

****.

При такой внутренней параметризации в точку  мы попадаем при значении параметра .

Тогда параметризация (не внутренняя) кривой **** будет иметь вид:

. Найдем касательный вектор кривой  в точке :



Таким образом, частная производная  параметризации  поверхности, подсчитанная в точке , есть касательный вектор координатной линии ****. Аналогично, частная производная по  параметризации поверхности , подсчитанная в точке , есть касательный вектор координатной линии ****.

Условие регулярности параметризации (см. определение 1) означает неколлинеарность (линенйную независимость) касательных векторов координатных линий различных семейств в точке или, что координатные линии различных семейств пересекаются не под нулевым углом.

Заметим, что кроме использованных уже обозначений  часто встречаются и обозначения .

касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Пусть  произвольная кривая в , проходящая через , и  ‑ внутренние (параметрические) уравнения . Тогда  ‑ параметризация , и

.

Это означает, что касательный вектор в точке  любой кривой, проходящей через эту точку, раскладывается по векторам , то есть он принадлежит направляющему пространству  плоскости

.

Эту плоскость назовем *касательной плоскостью поверхности*  *в точке *

Заметим, что, если вектор  в базисе  имеет координаты , то кривая с внутренними параметрическими уравнениями  пройдет через точку ** ибудет иметь в этой точке касательный вектор (вектор скорости) . Другими словами, пространство  состоит из векторов, касательных к кривым в точке **, и, соответственно, касательная плоскость  состоит из касательных прямых в точке ** к кривым, проходящим через эту точку.

Прямая проходящая через точку  ортогонально касательной плоскости  называется *нормалью поверхности в точке *.

В качестве направляющего вектора нормали поверхности в точке с внутренними координатами  можно взять единичный вектор .

Если в окрестности точки  выбрана параметризация (), то векторы  будут образовывать базис в касательном пространстве . Матрица  скалярного произведения в этом базисе определится равенствами:

,

,



И тогда скалярное произведение векторов  из , координаты которых заданы в базисе (), находится по формуле:



***Угол между кривыми на поверхности.***

Угол между кривыми – это угол между касательными к этим кривым в точке их пересечения.

Пусть кривые  и , заданные внутренними уравнениями , и  соответственно, пересекаются в точке

==.

Тогда векторы  являются касательными векторами в точке  для кривых  и . Угол  между кривыми  и  равен углу между этими векторами и определяется, как известно, из соотношения , где

,

а 

длина дуги кривой на поверхности.

Пусть  ‑ открытое множество на поверхности , () – параметризация , и пусть  ‑ произвольная кривая в  с внутренним уравнением , проходящая через точку .

Тогда  ‑ параметризация , и



Из следует, что вектор  в базисе (, ) имеет координаты , значит



Теперь для подсчета длины дуги  кривой, заданной внутренними уравнениями , между точками  и , осталось лишь вспомнить определение (5.1) ‑  и воспользоваться формулой .